

Incertitudes

I Variabilité des résultats expérimentaux	1
I.1 Présentation des résultats expérimentaux	1
I.2 Les deux types d'incertitudes	3
II Incertitudes de type A	3
III Incertitudes de type B	6
IV Exploitation du calcul d'incertitudes : comparaison de deux résultats	7

I Variabilité des résultats expérimentaux

Le résultat de toute mesure expérimentale est soumis à une certaine variabilité, due à des erreurs aléatoires lors de la mesure ou à une imprécision de la méthode de mesure. Ainsi, on ne fournira jamais de manière brute le résultat d'une mesure : on l'assortira d'une incertitude, qui estime l'erreur de mesure ou la dispersion des mesures attribuées à la grandeur mesurée.

I.1 Présentation des résultats expérimentaux

Le résultat de la mesure d'une grandeur X sera caractérisé par deux valeurs numériques :

- un **estimateur** x de la grandeur X ;
- l'**incertitude-type** $u(x)$, qui quantifie la variabilité de la mesure.

À partir de cette incertitude-type, on pourra également calculer l'**incertitude-type élargie** $U_{p\%}(x)$ autour de l'estimateur, associée à un niveau de confiance donné $p\%$, qui sera égale (comme son nom le suggère) à

$$U_{p\%}(x) = ku(x),$$

avec k un **facteur d'élargissement** dépendant du niveau de confiance considéré.

On écrira alors

$$X = x \pm U_{p\%}(x)$$

pour signifier qu'il y a $p\%$ de chance que la valeur vraie de la grandeur X se trouve dans l'intervalle

$$[x - U_{p\%}(x); x + U_{p\%}(x)],$$

en ce sens que si l'on répète un grand nombre de fois la mesure, la valeur vraie se trouvera dans cet intervalle dans $p\%$ des cas.

Cet intervalle est appelé l'**intervalle de confiance à $p\%$** pour cette mesure.

Le plus souvent, le seuil de confiance choisi est de 95%.

Remarque. En général, on ne garde qu'un seul chiffre significatif pour la valeur de l'incertitude, en l'arrondissant à la valeur supérieure. Cependant, si en arrondissant, l'incertitude est surestimée de plus de 10%, on gardera alors deux chiffres significatifs.

On prend ensuite comme dernier chiffre significatif de l'estimateur celui de même position que le dernier chiffre de l'incertitude.

Exemples.

- ★ Si, lors de la mesure d'une résistance R , on obtient que

$$R = 100,351389 \Omega \text{ et } U_{95\%}(R) = 0,842349 \Omega,$$

on présentera le résultat de la manière suivante :

$$R = 100,4 \pm 0,9 \Omega.$$

- ★ Si, lors de la mesure d'une concentration c , on obtient que

$$c = 0,1412 \text{ mol.L}^{-1} \text{ et } U_{95\%}(c) = 1,64 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1},$$

on présentera le résultat de la manière suivante :

$$c = 0,141 \pm 0,017 \text{ mol.L}^{-1}.$$

Graphiquement, l'intervalle de confiance se représente par une barre d'erreur.

Par exemple, la mesure $R = 100,4 \pm 0,9 \Omega$ peut se représenter ainsi.

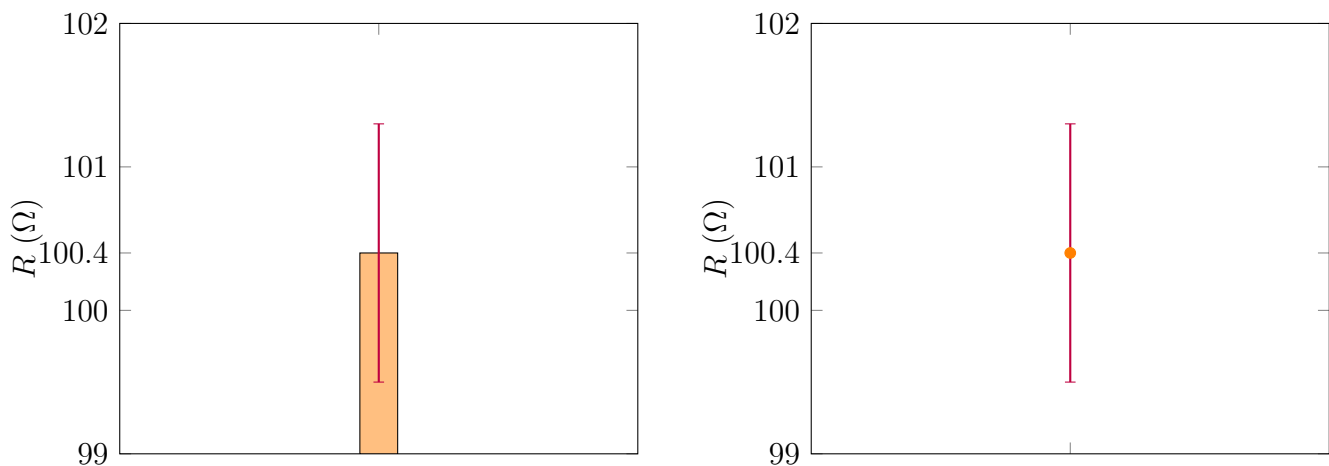


FIGURE 1 – Représentations graphiques par une barre d'erreur de l'intervalle de confiance à 95%

I.2 Les deux types d'incertitudes

Il y a deux manières de calculer une incertitude.

- Les **incertitudes de type A** sont évaluées par des méthodes statistiques, à partir d'une série de mesures effectuées dans les mêmes conditions expérimentales.
- Les **incertitudes de type B** sont évaluées à partir d'une mesure unique. Elles sont en particulier exploitées dans le cas où la variabilité est plus petite que la précision de la mesure.

II Incertitudes de type A

Dans cette partie, on suppose que l'on dispose d'un échantillon de n mesures $x_1, \dots, x_n$ d'une grandeur X , effectuées dans les mêmes conditions expérimentales.

En statistiques, on dira que $x = (x_1, \dots, x_n)$ est une **série statistique**.

Considérons la série statistique $x = (x_1, \dots, x_n)$.

- La **moyenne** de la série statistique x , notée $\bar{x}$, est la moyenne de ses valeurs :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ &= \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n).\end{aligned}$$

- La **variance** de la série statistique x , notée σ_x^2 , est la moyenne des carrés des écarts de ses valeurs à la valeur moyenne $\bar{x}$:

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{n} \left[(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \right].\end{aligned}$$

- L'**écart-type** de la série statistique x , noté σ_x , est la racine de sa variance :

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

L'écart-type est une notion d'écart moyen à la moyenne : plus il est élevé, plus les valeurs de la série statistique sont dispersées autour de la moyenne.

Remarque. La moyenne et l'écart-type ont la même unité que les valeurs de la série statistique.

La moyenne $\bar{x}$ des valeurs $x_1, \dots, x_n$ mesurées est l'estimateur de la grandeur X .

Le théorème central limite assure que lorsque le nombre n de mesures tend vers l'infini, la dispersion des valeurs obtenues (c'est-à-dire leur écart à la moyenne normalisé) tend vers celle d'une loi normale centrée réduite (dite également loi gaussienne).

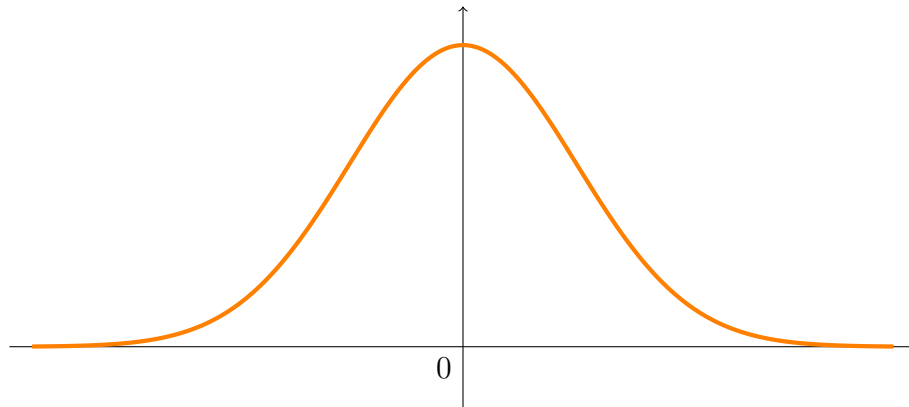


FIGURE 2 – Distribution gaussienne

Exploitions ce fait pour obtenir l'incertitude-type, ainsi que les incertitudes-type élargies associées à un seuil de confiance de 95% et de 99%.

Le théorème central limite donne que pour tout seuil de confiance $p\%$, il existe un facteur k tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(X \in \left[\bar{x} - k \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}; \bar{x} + k \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \right] \right) = p\%,$$

où

$$k = \begin{cases} 1,960 & \text{si } p = 95\% \\ 2,576 & \text{si } p = 99\%. \end{cases}$$

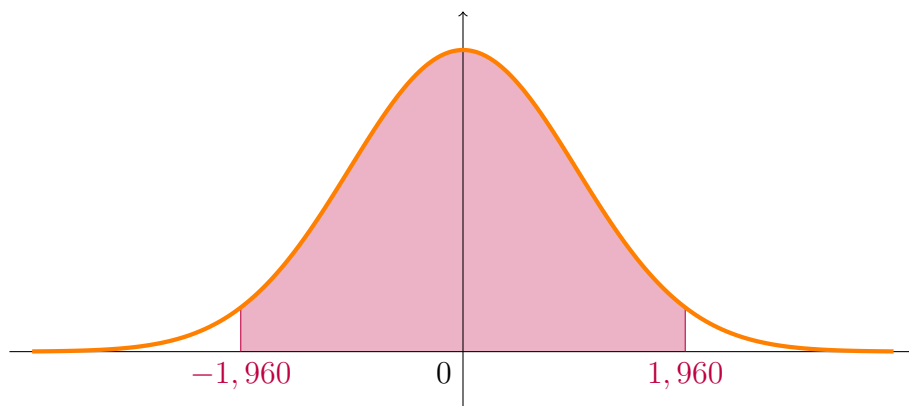


FIGURE 3 – L'aire violetée représente 95% de l'aire totale sous la courbe

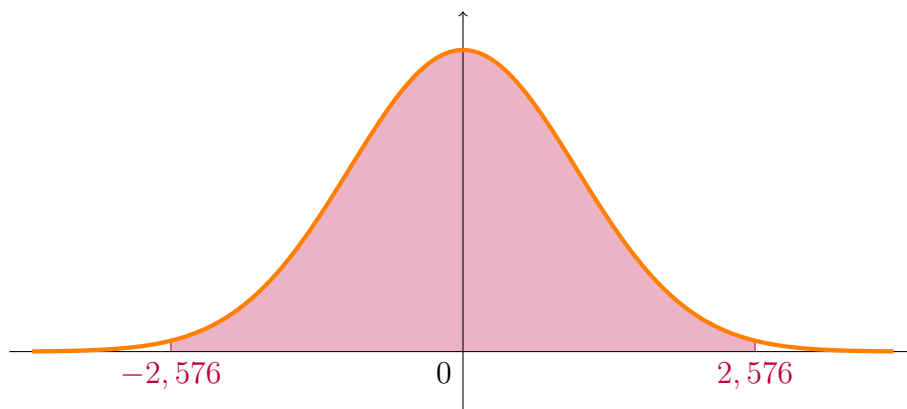


FIGURE 4 – L'aire violetée représente 99% de l'aire totale sous la courbe

On appelle alors **incertitude-type** de la mesure x le nombre

$$u(x) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}.$$

Lorsque le nombre n de mesures est grand, on considèrera que

$$\mathbb{P}\left(X \in \left[\bar{x} - k \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}; \bar{x} + k \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right]\right) \simeq p\%.$$

Ainsi, lorsque le nombre n de mesures est grand, on considèrera que l'intervalle de confiance à $p\%$ pour la grandeur X est

$$\left[\bar{x} - k \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}; \bar{x} + k \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right]$$

et que l'**incertitude-type élargie** au seuil de confiance $p\%$ vaut

$$U_{p\%}(x) = k \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = k u(x),$$

avec

$$k = \begin{cases} 1,960 & \text{si } p = 95\% \\ 2,576 & \text{si } p = 99\%. \end{cases}$$

Le résultat de la mesure de X , au seuil de confiance $p\%$, s'écrira donc

$$X = \bar{x} \pm U_{p\%}(x) = \bar{x} \pm k \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}.$$

Remarque. Pour dix groupes de TP, le nombre de mesures ne peut guère être considéré comme suffisamment grand pour que l'approximation précédente soit valide.

Pour adapter le calcul de l'incertitude à un petit nombre de mesures, on remplace la loi normale par la loi de Student. En pratique, pour dix mesures, le facteur d'élargissement sera remplacé :

- ★ par 2,228 pour un seuil de confiance à 95% ;
- ★ par 3,169 pour un seuil de confiance à 99%.

III Incertitudes de type B

Lorsque la variabilité des mesures est plus petite que la précision de la mesure, la variabilité n'est pas lisible à l'échelle de l'expérience, donc on ne peut pas l'estimer en répétant la mesure. Dans ce cas (ou dans le cas où l'on ne peut pas répéter la mesure), on estime alors la variabilité à partir d'une seule mesure, de la manière suivante.

On estime la plus petite plage dans laquelle on est certain·e de trouver la valeur recherchée. On appelle x la valeur centrale de cette plage et Δ sa demi-largeur : la valeur de la grandeur X se trouve donc dans l'intervalle $[x - \Delta; x + \Delta]$.
La valeur centrale x sera l'**estimateur** de la grandeur X .

La largeur 2Δ de l'intervalle précédent correspond à la plus petite variation de la grandeur mesurée qui produit une variation perceptible de l'indication délivrée par l'instrument de mesure.

Situations usuelles.

- ★ La **tolérance** Δ peut être indiquée directement sur l'instrument de mesure (elle est alors en général notée $\pm\Delta$). C'est le cas par exemple pour la verrerie jaugée.
- ★ Lorsque la valeur est lue sur un appareil à affichage numérique (sans aucune autre information), l'écart entre deux valeurs affichées successives est appelé la **résolution** et est noté δ . Elle correspond à un **digit**, c'est-à-dire à une unité sur le dernier chiffre affiché par l'appareil. Le nombre Δ vaut alors $\frac{\delta}{2}$.
- ★ Lorsque la valeur est lue sur des graduations, la résolution δ est égale à l'écart entre deux graduations successives, et le nombre Δ vaut également $\frac{\delta}{2}$ (c'est-à-dire une demi-graduation) dans ce cas.
- ★ Si la mesure dépend d'une appréciation humaine — visualisation d'une image nette, d'une couleur qui apparaît lors d'un dosage colorimétrique, etc. —, l'erreur liée à cette appréciation est prépondérante sur les autres erreurs de mesure. Dans ce cas, l'intervalle $[x - \Delta; x + \Delta]$ correspond à la plage de valeurs apparaissant comme valides à l'expérimentateur ou à l'expérimentatrice.
- ★ Le mode d'emploi d'un appareil peut également contenir une expression de la tolérance, de la forme :

$$q\% + m \text{ digit}$$

ce qui signifie que la tolérance Δ vaut $q\%$ de la valeur affichée plus m digits.

Dans tous ces cas, afin d'estimer la variabilité des mesures, on considère que la distribution des valeurs de X est uniforme sur l'intervalle $[x - \Delta; x + \Delta]$.
L'**incertitude-type** est alors définie comme l'écart-type de cette loi uniforme :

$$u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}.$$

IV Exploitation du calcul d'incertitudes : comparaison de deux résultats

On souhaite comparer les valeurs d'une même grandeur X dans deux ensembles de conditions expérimentales différents (par exemple, sous différentes conditions de température, de pH, etc.).

Pour cela, on commence par se placer dans les premières conditions expérimentales. On mesure alors la grandeur X dans ces conditions puis on calcule l'incertitude-type élargie associée. On se place ensuite dans les secondes conditions expérimentales. On mesure alors la grandeur X dans ces nouvelles conditions, puis on calcule, sur ces nouvelles mesures, l'incertitude-type élargie associée. On représente graphiquement par des barres d'erreur ces deux incertitudes.

- **Premier cas : les barres d'erreur ne se recoupent pas**

Si les barres d'erreurs ne se recoupent pas, alors la différence entre les deux mesures est **(statistiquement) significative** : au seuil de confiance considéré, on peut conclure que la valeur vraie de la grandeur X n'est pas la même dans les deux ensembles de conditions, et donc que les conditions expérimentales influent sur la grandeur X .

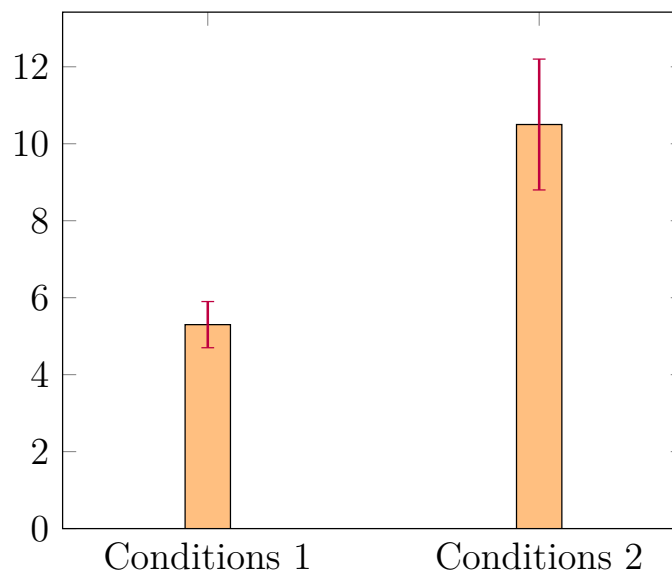


FIGURE 5 – Ici, l'expérience montre que la grandeur X est plus élevée dans les conditions 2 que dans les conditions 1.

- **Second cas : les barres d'erreur se recoupent**

Si les barres d'erreur se recoupent, alors la conclusion de l'expérience est que l'on n'observe **pas de différence significative** entre les deux mesures, et donc que les conditions expérimentales n'influencent pas sur la grandeur X .

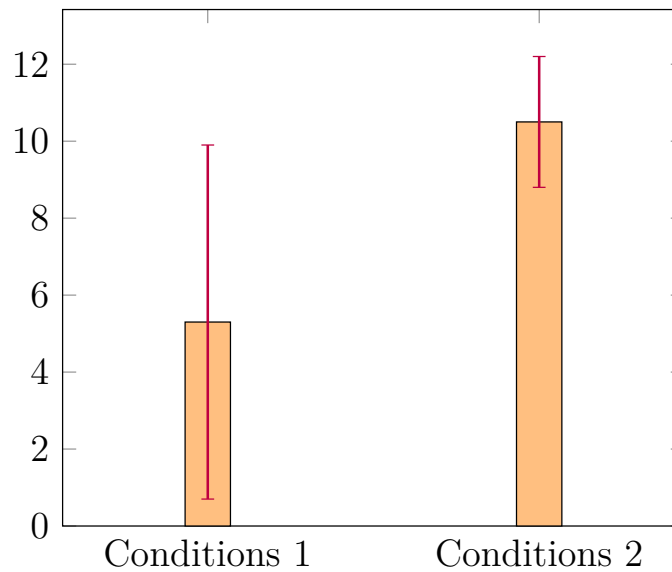


FIGURE 6 – Là, l'expérience ne montre pas de différence significative entre la valeur de X dans les conditions 1 et la valeur de X dans les conditions 2.

Deux cas de figure se présentent alors :

- ★ soit la valeur vraie de la grandeur X est effectivement la même dans les deux ensembles de conditions ;
- ★ soit la valeur vraie de la grandeur X est en fait différente dans les deux conditions, mais l'expérience réalisée n'est pas assez précise pour observer cette différence. Si l'on souhaite gagner en précision et diminuer l'incertitude sur la mesure, on peut refaire l'expérience avec davantage de réplicats (dans le cas d'une incertitude de type A) ou avec du matériel plus précis (dans le cas d'une incertitude de type B), par exemple.